Problém obchodního cestujícího

Zdeněk Hanzálek
hanzalek@fel.cvut.cz

ČVUT FEL Katedra řídicí techniky

3. dubna 2012

1. Obsah přednášky
2. Obecný TSP jeho složitost
   - Pravděpodobná neexistence r-aproximačního algoritmu pro obecný TSP
3. Metrický TSP a aproximační algoritmy
   - Dvojitá minimální kostra
   - Christofidesův algoritmus
4. Heuristiky na zlepšení trasy - Lokální prohledávání k-OPT
5. Závěr

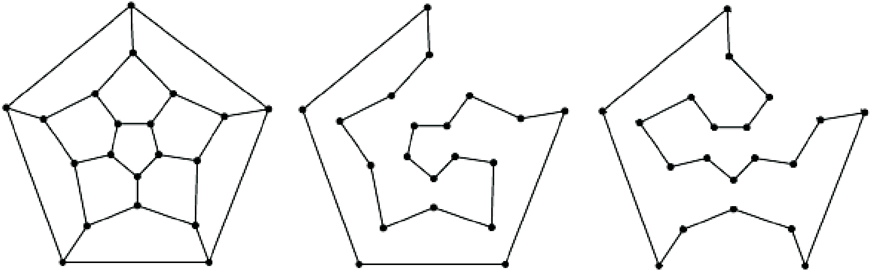
Související rozhodovací problém

Existence Hamiltonovské kružnice (HK)

- **Instance:** Neorientovaný graf G.
- **Cíl:** Rozhodnout, zda v grafu G existuje Hamiltonovská kružnice (kružnice procházející každým vrcholem právě jednou).

- NP-úplný problém
- též existuje orientovaná verze problému: (**existence Hamiltonovského cyklu**) pro orientované grafy
- snadno ukážeme, že patří do třídy NP, jelikož v případě kladného výsledku lze certifikát ověřit v polynomiálním čase prostým zakreslením do G

Hamiltonova hádanka



W.R. Hamilton zveřejnil v polovině 19. století hádanku v níž bylo cílem nalézt uzavřenou trasu přes dvacet vrcholů pravidelného dvanáctistěnu, přičemž přes žádný vrchol nelze projít dvakrát (obrázek lze chápat jako širokoúhlý pohled dovnitř dvanáctistěnu přes jednu jeho stěnu). Ve dvanáctistěnu, jako ve všech Platonovských tělesech, existuje Hamiltonoská kružnice.

Formulace problému

Problém obchodního cestujícího (Traveling Salesman Problem - TSP)

- **Instance:** Úplný neorinetovaný graf K_n ($n \geq 3$) a váhy $c : E(K_n) \rightarrow \mathbb{Q}_0^+$.
- **Cíl:** Nalézt Hamiltonovskou kružnici T jejíž váha $\sum_{e \in E(T)} c(e)$ je minimální.

- vrcholy odpovídají městům a váhy hran odpovídají vzdálenostem mezi městy (nebo nákladům na dopravu mezi městy)
- jde o **symetrický TSP** daný úplným neorientovaným grafem
- pokud se vzdálenost z města A do města B liší od vzdálenosti z B do A (například jednosměrné ulice), použijeme úplný orientovaný graf jež vede na **asymetrický TSP**

Silně NP-obtížný (Strongly NP-hard) problém

Nechť L je optimalizační problém.

Nechť L_p je jiný optimalizační problém daný jako omezení L polynomem p na takové instance x složené z nezáporných celých čísel, pro které platí $largest(x) \leq p(size(x))$. Neboli numerické parametry L_p jsou diskrétní a jsou omezeny polynomem velikosti vstupu (vzpomeňte například omezení velikosti stavového prostoru v úloze dynamického programování).

L je **silně NP-obtížný** pokud existuje polynom p takový, že L_p je NP-obtížný.

Pokud je L silně NP-obtížný, potom L nemůže být vyřešen pseudopolynomiálním algoritmem, ledaže by $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Složitost TSP a pravděpodobná neexistence pseudopolynomiálního alg.

Věta

TSP je silně NP-obtížný.

Důkaz: Pomocí polynomiálního převodu z problému **HK** ukážme, že **TSP** je NP-obtížný dokonce pro instanci TSP s váhami 1 nebo 2:

- Mějme neorientovaný graf G v němž chceme rozhodnout zda existuje Hamilton. kružnice.
- Vytvoříme instanci **TSP** tak, že každému vrcholu grafu G odpovídá jeden vrchol (město) v úplném neorinetovaném grafu K_n. Váha hrany (vzdálenost mezi městy) $\{i,j\}$ v K_n je:

$$c(\{i,j\}) = \begin{cases} 1 & pokud\ \{i,j\} \in E(G); \\ 2 & pokud\ \{i,j\} \notin E(G). \end{cases}$$

- G má Hamiltonovskou kružnici právě když optimální řešení **TSP** má hodnotu n. Neboli **TSP** je silně NP-obtížný.

Pravděpodobná neexistence r-aproximačního algoritmu pro obecný TSP

Věta

Pokud věříme, že P$\neq$NP, pak pro **TSP** neexistuje r-aproximační algoritmus pro žádné r ≥ 1.

Důkaz sporem:
Předpokládejme, že existuje (polynomiální) r-aproximační algoritmus $\mathcal{A}$ pro **TSP**.
Dále ukážeme, že pomocí tohoto "nepřesného" algoritmu $\mathcal{A}$ lze rozhodnout problém **HK**.
Jelikož problém **HK** je NP-úplný, tak P$=$NP.
Neboli: kdyby existoval (polynomiální) r-aproximační algoritmus $\mathcal{A}$ pro **TSP**, pak by se jím nechal (v polynomiálním čase) rozhodnout NP-úplný problém **HK**.

Pravděpodobná neexistence r-aproximačního algoritmu

Kdyby existoval (polynomiální) r-aproximační algoritmus $\mathcal{A}$ pro **TSP**, pak by se jím nechal (v polynom. čase) rozhodnout NP-úplný problém **HK**:

- Mějme neorientovaný graf G v němž v němž chceme rozhodnout zda existuje Hamilton. kružnice.
- Vytvoříme instanci **TSP** tak, že každému vrcholu grafu G odpovídá jeden vrchol (město) v úplném neorinetovaném grafu K_n. Váha hrany (vzdálenost mezi městy) $\{i, j\}$ v K_n je:

$$c(\{i,j\}) = \begin{cases} 1 & pokud\ \{i,j\} \in E(G); \\ 2 + (r-1) * n & pokud\ \ \{i,j\} \notin E(G). \end{cases}$$

- Použijeme $\mathcal{A}$ na tuto instanci. Zjistíme, zda výsledek má hodnotu n:
  - Pokud ano, potom v G existuje Hamiltonovská kružnice.
  - V opačném případě má výsledek hodnotu alespoň $(n-1) + 2 + (r-1) * n = r * n + 1$. Jelikož $\mathcal{A}$ je r-aproximační algoritmus, tak $\frac{r*n+1}{OPT(K_n,c)} \leq r$. Což implikuje $(OPT(K_n, c) > n)$, že v G není Hamiltonovská kružnice.

Trojúhelníková nerovnost

Ve většině praktických aplikací **TSP** vzdálenosti splňují trojúhelníkovou nerovnost.

Metrický TSP

- **Instance:** Úplný neorinetovaný graf K_n ($n \geq 3$) a váhy $c : E(K_n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ pro které platí $c(\{i,j\}) + c(\{j,k\}) \geq c(\{k,i\})$ pro všechny $i, j, k \in V(K_n)$.
- **Cíl:** Nalézt Hamiltonovskou kružnici T jejíž váha $\sum_{e \in E(T)} c(e)$ je minimální.

- **metrický TSP** je silně NP-obtížný. K tomu lze použít stejný důkaz, jaký byl uveden u složitosti **TSP**, jelikož váhy 1 a 2 zachovávají trojúhelníkovou nerovnost.
- ukážeme heuristiky a aproximační algoritmy pro metrický TSP

Nejbližší soused - heuristika

Vstup: Instance (K_n, c) **Metrického TSP**.
Výstup: Hamiltonovská kružnice H.
Zvolíme libovolný vrchol $v_{[1]} \in V(K_n)$;
for $i := 2$ **to** n **do**
    vyber $v_{[i]} \in V(K_n) \setminus \{v_{[1]}, \cdots, v_{[i-1]}\}$ takový, že $c(\{v_{[i-1]}, v_{[i]}\})$ je minimální ;
end
Hamiltonovská kružnice H je tvořena posloupností $\{v_{[1]}, \cdots, v_{[n]}, v_{[1]}\}$;

- v každém kroku je vybráno nejbližší doposud nenavštívené město
- není to aproximační algoritmus
- časová náročnost algoritmu je $O(n^2)$

Dvojitá minimální kostra

Vstup: Instance (K_n, c) **metrického TSP**.
Výstup: Hamiltonovská kružnice H.

1. Nalezneme T, **minimální kostru** grafu (MST) K_n s váhami c;
2. **Zdvojením hran** T dostaneme multigraf v němž **nalezneme Eulerovskou kružnici** L (Eulerovská kružnice neobsahuje žádnou hranu dvakrát);
3. **Transformujeme Eulerovskou kružnici** L **na Hamiltonovskou kružnici** H **v úplném grafu** K_n:
   - vytvoříme posloupnost vrcholů ležících na Eulerovské kružnici L;
   - v posloupnosti **vynecháme ty vrcholy, které se v ní již vyskytly**;
   - zbytek tvoří Hamiltonovskou kružnici H;

Dvojitá minimální kostra je 2-aproximační algoritmus

časová náročnost algoritmu je $O(n^2)$
pro **metrický TSP** jde o 2-aproximační algoritmus:

- 1. díky trojúhelníkové nerovnosti vynechání vrcholů neprodlouží trasu, neboli platí $c(E(L)) \geq c(E(H))$
- 2. jelikož vymazáním jedné hrany v kružnici vznikne kostra, tak platí $OPT(K_n, c) \geq c(E(T))$
- 3. díky konstrukci L zdvojením T platí $2c(E(T)) = c(E(L))$
- spojení 2.,3. a 1. implikuje $2OPT(K_n, c) \geq c(E(H))$

Christofidesův algoritmus [1976]

Vstup: Instance (K_n, c) **metrického TSP**.

Výstup: Hamiltonovská kružnice H.

1. Nalezneme T, minimální kostru grafu (MST) K_n s váhami c;
2. Nechť W je množina vrcholů mající **lichý stupeň** v T.
3. Nalezneme M **nejlevnější perfektní párování** vrcholů z množiny W v grafu K_n s váhami c;
4. Spojením T a M dostaneme multigraf $(V(K_n), E(T) \cup M)$ v nemž nalezneme Eulerovskou kružnici L;
5. Transformujeme Eulerovskou kružnici L na Hamiltonovskou kružnici H v úplném grafu K_n ;

Pozn: Každá hrana spojuje 2 vrcholy $\Rightarrow$ součet stupňů všech vrcholů je $2|E| \Rightarrow$ v každém grafu je sudý počet vrcholů s lichým stupněm (a libovolný počet vrcholů se sudým stupněm)

Z předchozí věty a z úplnosti grafu K_n plyne, že lze nalézt perfektní párování.

Christofidesův algoritmus je $\frac{3}{2}$-aproximační

časová náročnost algoritmu je $O(n^3)$
pro **metrický TSP** jde o $\frac{3}{2}$-aproximační algoritmus:

- 1. díky trojúhelníkové nerovnosti vynechání vrcholů neprodlouží trasu, neboli platí $c(E(L)) \geq c(E(H))$
- 2. jelikož vymazáním jedné hrany v kružnici vznikne kostra, tak platí $OPT(K_n, c) \geq c(E(T))$
- 3. jelikož perfektní párování M uvažuje v alternující cestě vždy každou druhou hranu a jako nejlevnější M vybere tu menší polovinu , tak $\frac{OPT(K_n,c)}{2} \geq c(M)$
- 4. díky konstrukci L platí $c(M) + c(E(T) = c(E(L))$
- spojení 2.,3. s levou stranou 4. a spojení 1. s pravou stranou 4. implikuje $\frac{3}{2} OPT(K_n, c) \geq c(E(H))$

Heuristiky na zlepšení trasy - Lokální prohledávání *k*-OPT

Jedna z nejúspěšnějších technik pro instance **TSP** z praxe.
Jednoduchá myšlenka použitelná i pro řešení jiných problémů:

- použijeme libovolnou Hamiltonovskou kružnici nalezenou např. heuristikou,
- toto řešení vylepšíme pomocí "lokálních změn" (např. vymazáním dvou hran, rozdělíme kružnici na dvě části, které spojíme pomocí jiných hran).

Lokální prohledávání je algoritmický princip založený na dvou rozhodnutích:

- jaké modifikace jsou povolené,
- kdy skutečně modifikujeme dané řešení (jedna možnost je dovolit pouze modifikace, které vylepšují řešení).

Příkladem je *k*-OPT algoritmus pro TSP.

k-OPT algoritmus pro TSP

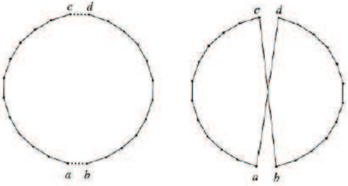
Vstup: Instance (K_n, c) **TSP**, číslo $k \geq 2$.
Výstup: Hamiltonovská kružnice H.
1. Nechť H je libovolná Hamiltonovská kružnice;
2. Nechť $\mathcal{S}$ je skupina k-člených podmnožin $E(H)$;

for všechny $S \in \mathcal{S}$ **do**
  for všechny Ham.kružnice H' takové, že $E(H') \supseteq E(H) \setminus S$ **do**
    if $c(E(H')) < c(E(H))$ **then** $H := H'$ a **go to** 2.;
  end
end
Stop

Pozn:

- pro $k = 2$ se vnitřní for smyčka, jež vytváří Hamiltonovské kružnice H' z hran co “zbyly” po H, provede pouze jednou, jelikož existuje právě jedna nová Hamiltonovská kružnice

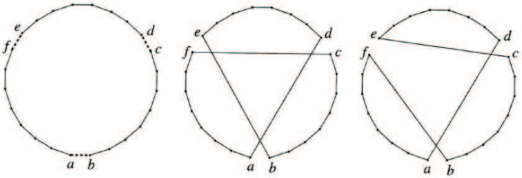
2-opt



jedno možné řešení:

- zisk cenové funkce lze vyjádřit jako: $c(E(H')) - c(E(H)) =$ (a,d)+(b,c)-(c,d)-(a,b) přitom cesta (b,...,d) změnila orientaci

3-opt

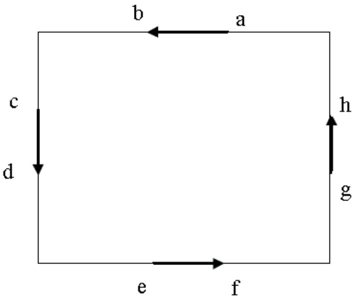


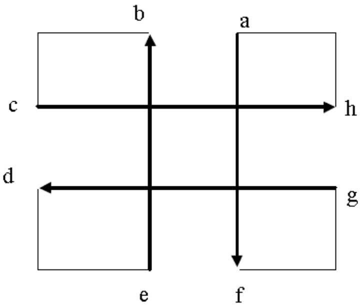
dvě možná řešení:

- $c(E(H')) - c(E(H)) =$ (a,d)+(e,b)+(c,f)-(a,b)-(c,d)-(e,f) žádná cesta nemění orientaci
- $c(E(H^{/}\prime\prime)) - c(E(H)) =$ (a,d)+(e,c)+(b,f)-(a,b)-(c,d)-(e-f) cesta (c,...,b) změnila orientaci

Ilustrace 4-opt pro TSP

Jedno z možných řešení zvané "double bridge" - nemění orientaci cest:





TSP - Shnutí

- Jeden z "nejsledovanějších" NP-obtížných problémů
- 49 - 120 550 - 2,392 - 7,397 19,509 - 24,978 měst od roku 1954 do roku 2004
- Pro praktické použití je potřeba zahrnout velkou řadu omezení:
  - CVRP - Capacitated Vehicle routing Problem - máme k dispozici několik automobilů s omezenou kapacitou a každý zákazník odebírá určité množství
  - VRPTW - Time Windows - zákazníci definují časové okno, ve kterém přebírají náklad
  - VRPPD - Pick-up and Delivery - zákazníci vracejí určité množství (například obaly), které zabírá místo v automobilu

Literatura

David L. Applegate, Robert E. Bixby, Vasek Chvátal, and William J. Cook.
The Traveling Salesman Problem: A Computational Study.
Princeton University Press, 2007.

B. H. Korte and Jens Vygen.
Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms.
Springer, fourth edition, 2008.